

Tartalom

ELŐSZÓ	8
BEVEZETÉS	10

1 SZÁMOK

Bevezetés a számok világába	14
Összeadás	16
Kivonás	17
Szorzás	18
Osztás	22
Prímszámok	26
Mértékegységek	28
Az idő	30
Római számok	33
Pozitív és negatív számok	34
Hatványok és gyökök	36
Irracionális gyökszámok	40
Normálalak	42
Tizedes törtek	44
Kettes számrendszer	46
Törtek	48
Arány és arányosság	56
Százalékok	60
Törtek, tizedes törtek és százalékok átalakítása	64
Fejszámolás	66
Kerekítés	70
A számológép használata	72
Személyes pénzügyek	74
Üzleti pénzügyek	76

2 GEOMETRIA

A geometria fogalma	80
Geometriai eszközök	82
Szögek	84
Egyenesek	86
Szimmetria	88
Koordináták	90
Vektorok	94
Eltolás	98
Forgatás	100
Tükrözés	102
Nagyítás	104
Méretarányos rajzolás	106
Égtájak	108
Szerkesztések	110
Mértani helyek	114
Háromszögek	116
Háromszögek szerkesztése	118
Egybevágó háromszögek	120
A háromszög területe	122
Hasonló háromszögek	125
A Pitagorasz-tétel	128
Négyszögek	130
Sokszögek	134
Körök	138
Kerület és átmérő	140

A kör területe	142
A körben lévő szögek	144
Húrok és húrnégyszögek	146
Érintők	148
Ívek	150
Körcikkek	151
Testek	152
Térfogat	154
A testek felszíne	156

3 TRIGONOMETRIA

A trigonometria fogalma	160
Trigonometriai képletek használata	161
A hiányzó oldalak kiszámítása	162
A hiányzó szögek kiszámítása	164

4 ALGEBRA

Az algebra fogalma	168
Sorozatok	170
A kifejezések használata	172
Kifejezések felbontása és összevonása	174
Másodfokú kifejezések	176
Képletek	177
Egyenletek megoldása	180
Függvények grafikonja	182
Egyenletrendszerek	186
Másodfokú egyenletek szorzattá alakítása	190

A megoldóképlet	192
A másodfokú függvény	194
Egyenlőtlenségek	198

5 STATISZTIKA

A statisztika fogalma	202
Adatok gyűjtése és rendszerezése	204
Oszlopdiagramok	206
Kördiagramok	210
Vonaldiagramok	212
Középértékek	214
Mozgóátlagok	218
A szóródás mérése	220
Hisztogramok	224
Szórásdiagram	226

6 VALÓSZÍNŰSÉG

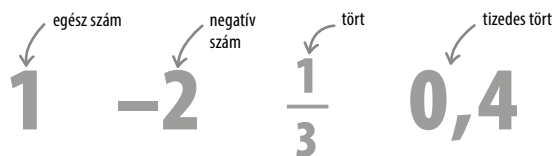
A valószínűség fogalma	230
Várható érték és valószínűség	232
Együttes valószínűség	234
Összefüggő események	236
Valószínűségi fa	238
Kislexikon	240
Szószeret	252
Tárgymutató	258
Köszönetnyilvánítás	264

2 Bevezetés a számok világába

A számok olyan szimbólumok, melyek eredetileg mennyiséget fejeztek ki, a matematikusok azonban az évszázadok során olyan módszereket fedeztek fel, melyek segítségével a számok használata és értelmezése révén új információkhoz juthatunk.

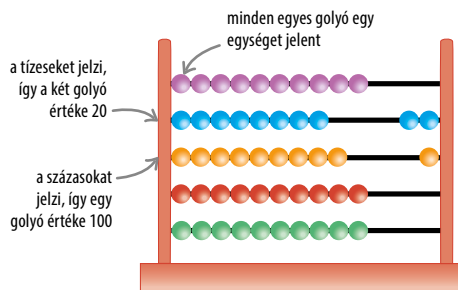
A számok fogalma

A jól ismert, 0 és 9 közötti számok mennyiséget jellemző, általánosan elfogadott szimbólumok. Az egész számokon (más szóval egészek) kívül megkülönböztetünk törteket (lásd: 48–55. oldal) és tizedes törteket (lásd: 44–45. oldal). A számok nullánál kisebbek, más szóval negatívak is lehetnek (lásd: 34–35. oldal).



△ A számok fajtái

A fenti példában az 1 pozitív egész szám, a -2 pedig negatív szám. Az $\frac{1}{3}$ szimbólum egy három részre osztott szám egyik részét jelenti. A tizedes tört a törtszámok egy másik leírásmódja.



◁ Abakusz

Az abakusz egy hagyományos számolóeszköz, amelyen a számokat golyók jelképezik. A képen látható szám értéke 120.

▽ Az első szám

A szorzás egységének nevezik, mivel bármely számot 1-gyel szorozva a számot kapjuk eredményül.

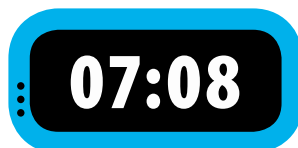
▽ Páros prímszám

A 2 az egyetlen páros prímszám, azaz olyan szám, amely csak 1-gyel és önmagával osztható (lásd: 26–27. oldal).

KÖZELEBBRŐL

A nulla

A nulla szimbólum bevezetése jelentős fejlődést jelentett a számok írásmódjában. A nulla bevezetése előtt a számítások során szóközt használtak. Ez kétértelmű volt, és könnyű volt összekeverni a számokat. Nehéz volt például különbséget tenni a 400, a 40 és a 4 között, mivel mindegyiket ugyanaz a szimbólum jelölte (a 4). A nulla szimbólum a pontból fejlődött ki, melyet indiai matematikusok használtak először helyőtlóként.



a nulla a 24 órás idő kijelzése során fontos

◁ Könnyű leolvasni

A nulla az idő kijelzésekor a tízesek helyőtlójaként szolgál, így az egyes percek könnyen megkülönböztethetők.



△ Tökéletes szám

Ez a legkisebb tökéletes szám, azaz olyan szám, amely megegyezik pozitív osztóinak összegével (magát a számot kivéve): $1 + 2 + 3 = 6$.

△ Nem négyzetszámok összege

A 7-es a legkisebb szám, amely nem írható fel három vagy annál kevesebb egész szám négyzetének összegéként.

VALÓS VILÁG

Számjelölés

Számos civilizáció saját jelölésmódot fejlesztett ki a számokra, ezek közül néhány itt látható a modern hindu–arab számokkal együtt. Az általunk használt modern számrendszer egyik nagy előnye, hogy az aritmetikai műveletek, például a szorzás és az osztás így sokkal könnyebben elvégezhetők, mint a régebbi, bonyolultabb számírással.

Modern hindu–arab	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Maja	•	••	•••	••••	—	• —	•• —	••• —	•••• —	=====
Ókori kínai	一	二	三	四	五	六	七	八	九	十
Ókori római	I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X
Ókori egyiptomi										⌋
Babilóniai	𐎶	𐎵	𐎴	𐎳	𐎲	𐎱	𐎰	𐎯	𐎮	𐎭

▽ Háromszögszám

Ez a legkisebb háromszögszám, azaz olyan pozitív egész szám, amely szomszédos egész számok összege (esetünkben $1 + 2$).

▽ Összetett szám

A 4-es a legkisebb összetett szám, azaz olyan szám, amely felírható két (egynél nagyobb) szám szorzataként. A 4 két szorzótényezője a 2×2 .

▽ Prímszám

Ez az egyetlen 5-re végződő prímszám. Az 5 oldalú sokszög az egyetlen, amelyben az oldalak és az átlók száma megegyezik.



△ Fibonacci-szám

A 8-as egy köbszám ($2^3 = 8$), illetve az 1-en kívül az egyetlen olyan Fibonacci-szám (lásd: 171. oldal), amelyik köbszám.

△ A legnagyobb egyjegyű szám

A 9-es a legnagyobb egyjegyű szám a tízes számrendszerben.

△ Alapszám

A nyugati számrendszer alapszáma a tíz, feltételezhetően azért, mert az emberek kezük és lábuk ujjait használták a számoláshoz.

+ Összeadás

LÁSD MÉG:

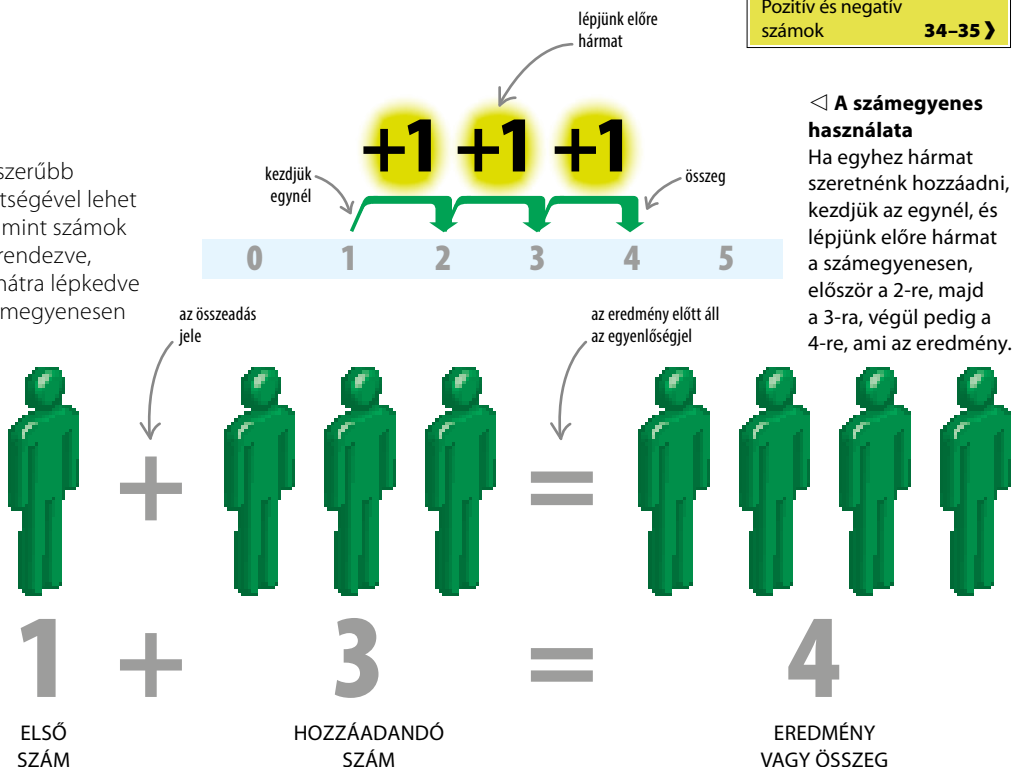
Kivonás	17 >
Pozitív és negatív számok	34–35 >

Összeadás

Két szám összegét a legegyszerűbb módon a számegyenes segítségével lehet meghatározni. Ez nem más, mint számok csoportja egy egyenesen elrendezve, aminek mentén előre vagy hátra lépkedve tudunk számolni. Ezen a számegyenesen hármat adunk egyhez.

▷ Mit jelent ez?

Az 1 és a 3 összeadásának eredménye 4. Más szóval, 1 meg 3 egyenlő 4.

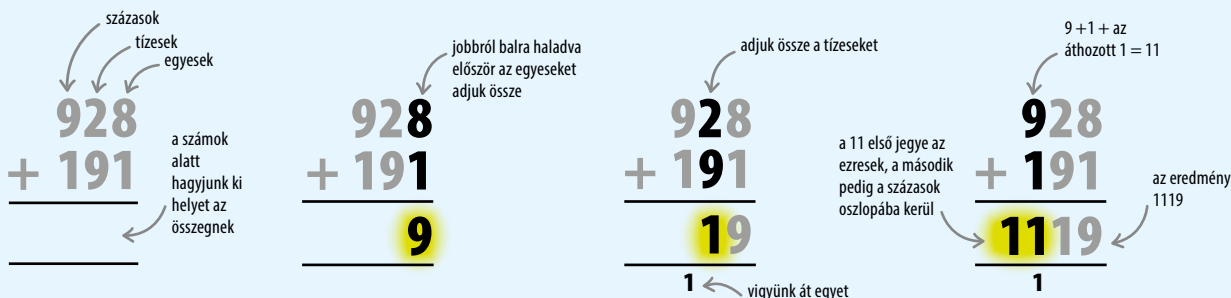


◁ A számegyenes használata

Ha egyhez hármat szeretnénk hozzáadni, kezdjük az egynél, és lépünk előre hármat a számegyenesen, először a 2-re, majd a 3-ra, végül pedig a 4-re, ami az eredmény.

Nagy számok összeadása

A két vagy több számjegyből álló számok összeadása függőleges oszlopokban történik. Először az egyeseket, majd a tízeseket, százásokat stb. kell összeadni egymással. Az egyes oszlopok összegét az oszlop alá kell írni. Ha az összeg két számjegyű, az első át kell vinni a következő oszlopba.



Először írjuk a számokat egymás alá úgy, hogy az egyesek, tízesek és százások közvetlenül egymás alatt legyenek.

Adjuk össze az egyeseket (1 és 8), majd írjuk az összeget (9) az egyesek alatti helyre.

Mivel a tízesek összege két számjegyű, írjuk le a második számjegyet, és vigyük át az első a következő oszlopba.

Végül adjuk össze a százásokat és az átvitt számjegyet. Mivel az összeg kétjegyű, ezért az első jegy az ezresek oszlopába kerül.

Kivonás

LÁSD MÉG:

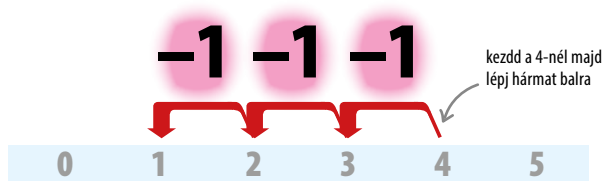
◀ 16 Összeadás

Pozitív és negatív számok

34–35 ▶

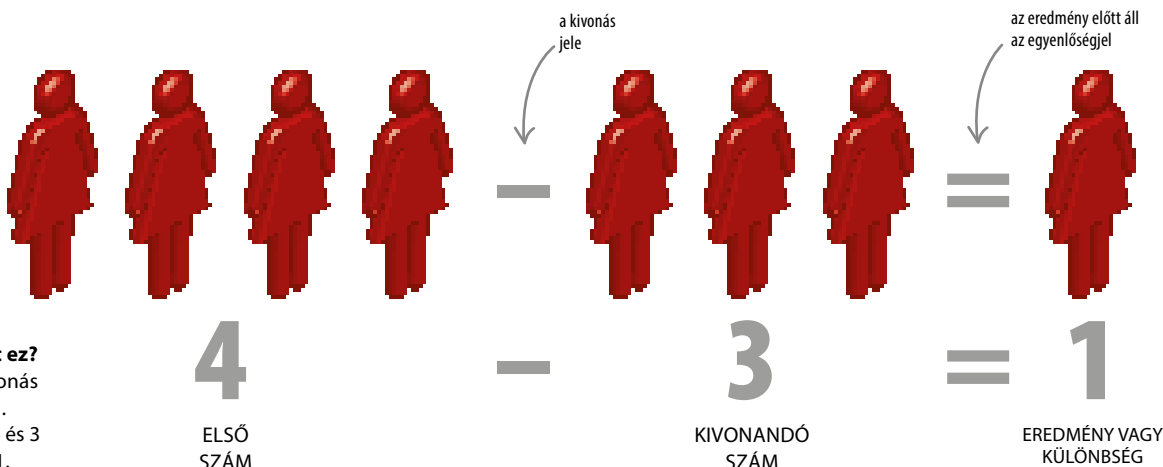
Kivonás

A számegyenes két szám kivonásának szemléltetésére is használható. Az első számtól kezdve lépkedjünk visszafelé a számegyenesen annyit, amennyit a második szám mutat.



◁ A számegyenes használata

Ha négyből hármat szeretnél kivonni, kezd a négynél, majd lépjél hármat visszafelé a számegyenesen, először a 3-ra, majd a 2-re, végül pedig az 1-re.

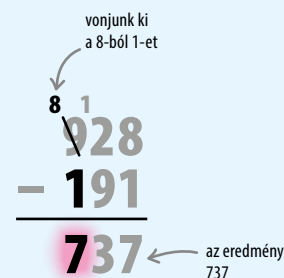
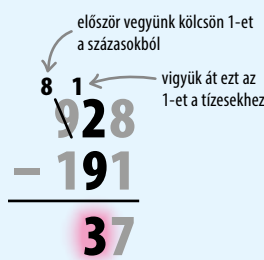
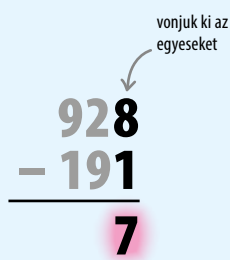


▷ Mit jelent ez?

A 4-ből 3 kivonás eredménye 1. Más szóval, 4 és 3 különbsége 1.

Nagy számok kivonása

A két vagy több számjegyből álló számok kivonása függőleges oszlopokban történik. Először az egyeseket, majd a tízeseket, százásokat stb. kell kivonni egymásból. Néha előfordul, hogy egy számjegyet „kölcson kell venni” a következő oszlopból.



Először írjuk a számokat egymás alá úgy, hogy az egyesek, tízesek és százások közvetlenül egymás alatt legyenek.

Most vonjuk ki az 1-et a 8-ból és írjuk a különbséget (7) a számok alatti helyre.

A tízesek esetében a 9 nem vonható ki a 2-ből, ezért 1-et „kölcson veszünk” a százásokból, így a 9-ből 8, a 2-ből pedig 12 lesz.

A százások oszlopában vonjunk ki 1-et az előző lépésben kapott, új, 8-as számból.



Szorzás

LÁSD MÉG:

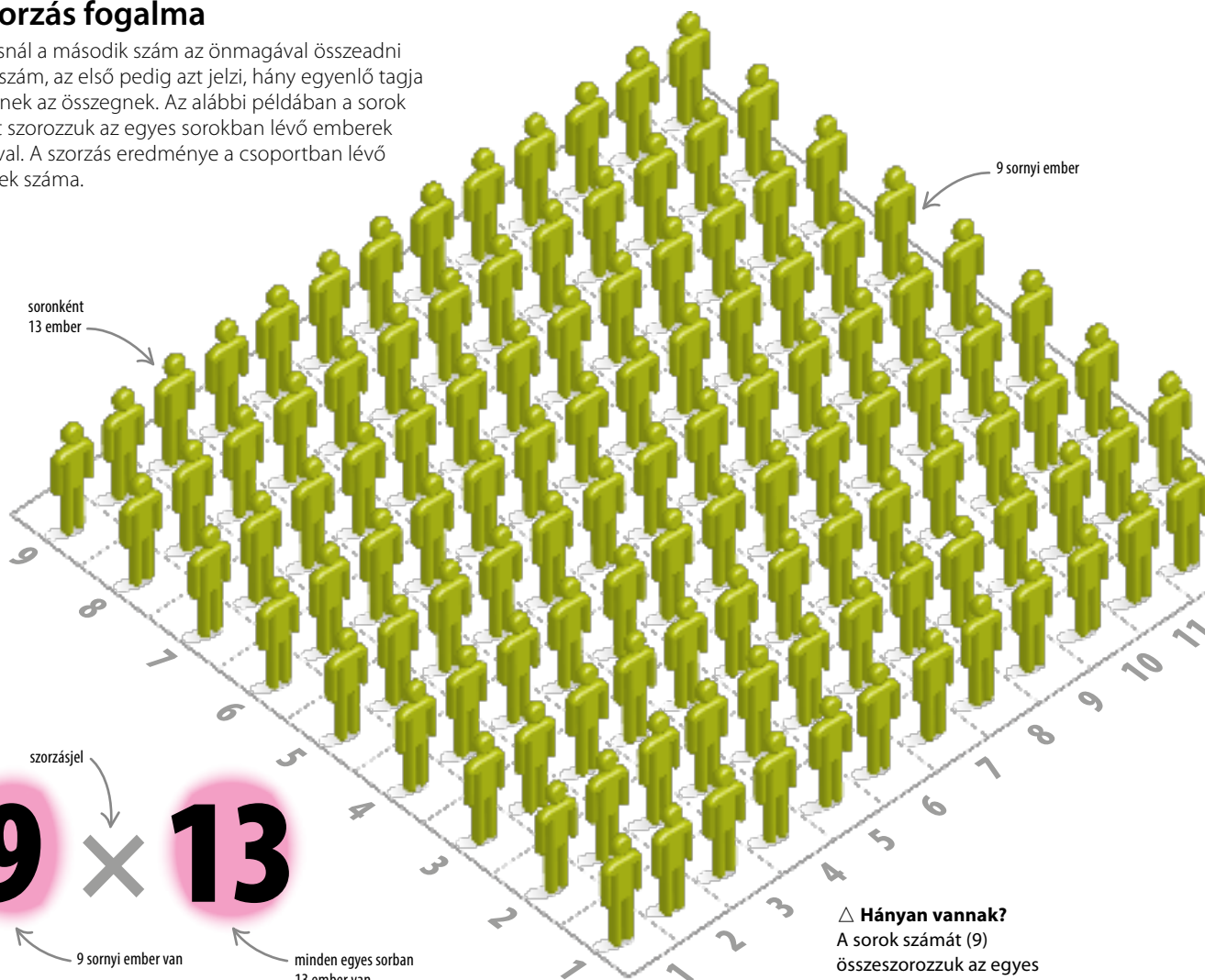
◀ 16–17 Összeadás
és kivonás

Osztás **22–25 ▶**

Tizedes
törtek **44–45 ▶**

A szorzás fogalma

Szorzásnál a második szám az önmagával összeadni kívánt szám, az első pedig azt jelzi, hány egyenlő tagja van ennek az összegnek. Az alábbi példában a sorok számát szorozzuk az egyes sorokban lévő emberek számával. A szorzás eredménye a csoportban lévő emberek száma.



szorzásjel

9 × 13

9 sornyi ember van

minden egyes sorban
13 ember van

ez azt jelenti, hogy a 13-at 9-szer kell
önmagával összeadni

△ Hányan vannak?

A sorok számát (9) összeszorozzuk az egyes sorokban lévő emberek számával (13). Összesen 117 ember van.

$$9 \times 13 = 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 + 13 = 117$$

9 és 13 szorzata 117

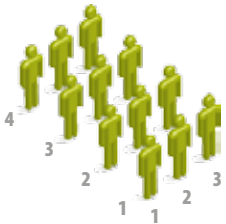
Mindkét irányban működik

Mindegy, hogy a szorzat tényezői milyen sorrendben követik egymást, mivel az eredmény ugyanaz. Az alábbi ábrán ugyanazon szorzás látható kétféleképpen.

$4 \times 3 = 3 + 3 + 3 + 3 = 12$



$3 \times 4 = 4 + 4 + 4 = 12$



a 3 önmagával négyszer összeadva 12

a 4 önmagával háromszor összeadva 12

Szorzás 10-zel, 100-zal, 1000-rel Szorzási szabályok

Egész számok 10-zel, 100-zal, 1000-rel stb. szorzásához írjunk egy (0), kettő (00), három (000) stb. nullát a kiinduló szám után.

Két számot nagyon könnyű összeszorozni egymással, ha emlékszünk ezekre a szabályokra. Az alábbi táblázatban a 2-vel, 5-tel, 6-tal, 9-cel, 12-vel és 20-szal történő szorzás szabályai láthatók.

írjunk egy nullát a szám végére

 $34 \times 10 = 340$

írjunk két nullát a szám végére

 $72 \times 100 = 7200$

írjunk három nullát a szám végére

 $18 \times 1000 = 18000$

SZORZÁSI TIPPEK		
Szorzandó szám	Szorzás módja	Példa a szorzásra
2	Adjuk össze a számot önmagával	$2 \times 11 = 11 + 11 = 22$
5	A szám utolsó jegye az 5, 0, 5, 0 mintát követi	5, 10, 15, 20
6	A 6-ot tetszőleges páros számmal szorozva az eredmény utolsó számjegye megegyezik a páros számmal	$6 \times 12 = 72$ $6 \times 8 = 48$
9	Szorozzuk meg a számot 10-zel, majd vonjuk ki belőle a számot	$9 \times 7 = 10 \times 7 - 7 = 63$
12	Szorozzuk meg az eredeti számot először 10-zel, majd 2-vel és adjuk össze a két számot	$12 \times 10 = 120$ $12 \times 2 = 24$ $120 + 24 = 144$
20	Szorozzuk meg a számot 10-zel, majd az eredményt 2-vel	$14 \times 20 =$ $14 \times 10 = 140$ $140 \times 2 = 280$

TÖBBSZÖRÖSÖK

Egy számot egész számokkal szorozva a szám többszörösét kapjuk. A 2 első hat többszöröse például 2, 4, 6, 8, 10 és 12, mivel $1 \times 2 = 2$, $2 \times 2 = 4$, $3 \times 2 = 6$, $4 \times 2 = 8$, $5 \times 2 = 10$ és $6 \times 2 = 12$.

3 TÖBBSZÖRÖSEI

$$3 \times 1 = 3$$

$$3 \times 2 = 6$$

$$3 \times 3 = 9$$

$$3 \times 4 = 12$$

$$3 \times 5 = 15$$

a 3 első öt
többszöröse

8 TÖBBSZÖRÖSEI

$$8 \times 1 = 8$$

$$8 \times 2 = 16$$

$$8 \times 3 = 24$$

$$8 \times 4 = 32$$

$$8 \times 5 = 40$$

a 8 első öt
többszöröse

12 TÖBBSZÖRÖSEI

$$12 \times 1 = 12$$

$$12 \times 2 = 24$$

$$12 \times 3 = 36$$

$$12 \times 4 = 48$$

$$12 \times 5 = 60$$

a 12 első öt
többszöröse

Közös többszörösök

Kettő vagy több számnak vannak közös többszörösei. A jobb oldalához hasonló táblázat segítségével meghatározhatók ezek a közös többszörösök. Ezek közül a legkisebbet legkisebb közös többszörösnek nevezzük.

24

Legkisebb közös többszörös

A 3 és a 8 legkisebb közös többszöröse 24, mivel ez a legkisebb szám, ami mindkettővel osztható.



3 többszörösei



8 többszörösei



3 és 8 többszörösei

▷ Közös többszörösök meghatározása

A táblázatban a 3 és a 8 többszörösei vannak kiemelve. Jól látható, hogy néhány többszörös közös.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
51	52	53	54	55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66	67	68	69	70
71	72	73	74	75	76	77	78	79	80
81	82	83	84	85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96	97	98	99	100

Rövid szorzás

Többjegyű szám egyjegyűvel történő szorzását rövid szorzásnak nevezzük. A kisebb számot a nagyobb szám egyesei alá írjuk.

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 7 \\ \hline 1372 \end{array}$$

az egyesek oszlopába 6-ot írunk
az egyesek oszlopába 2-t írunk
a 4-et átvisszük a tízesek oszlopába

196 és 7 összeszorzásához először szorozzuk össze a 6-ot és a 7-et. Az eredmény 42, melyből a 4-et átvisszük a következő oszlopba.

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 7 \\ \hline 1372 \end{array}$$

a tízesek oszlopába 9-et írunk
a tízesek oszlopába 7-et írunk
a 6-ot átvisszük a százaskok oszlopába

Most szorozzuk össze a 9-et és a 7-et, ami 63. Az átvitt 4-et hozzáadva 67-et kapunk.

$$\begin{array}{r} 196 \\ \times 7 \\ \hline 1372 \end{array}$$

a százaskok oszlopába 3-at, az ezresek oszlopába 1-et írunk
az eredmény 1372

Végezetül szorozzuk össze az 1-et és a 7-et. A szorzatot (7) az átvitt 6-hoz hozzáadva 13-at kapunk, a szorzás végeredménye pedig 1372.

Hosszú szorzás

Két, egyenként legalább kétjegyű szám szorzását hosszú szorzásnak nevezzük. A két számot egymás alá kell írni úgy, hogy a megfelelő helyi értékek (egyesek, tízesek, százaskok stb.) egymás alá kerüljenek.

$$\begin{array}{r} 428 \\ \times 111 \\ \hline 428 \end{array}$$

428 szorozva 1-gyel

Először szorozzuk össze a 428-at az egyesek oszlopában lévő 1-gyel. Haladjunk jobbról balra.

$$\begin{array}{r} 428 \\ \times 111 \\ \hline 428 \end{array}$$

428 szorozva 10-zel
10-zel szorozáskor írjunk a szám végére nullát

Szorozzuk össze a 428-at a tízesek oszlopában lévő 1-gyel, számjegyenként haladva.

$$\begin{array}{r} 428 \\ \times 111 \\ \hline 428 \\ 4280 \end{array}$$

428 szorozva 100-zal
100-zal szorozáskor írjunk a szám végére 2 nullát

Szorozzuk össze a 428-at a százaskok oszlopában lévő 1-gyel, számjegyenként haladva.

$$\begin{array}{r} 428 \\ \times 111 \\ \hline 428 \\ + 4280 \\ + 42800 \\ \hline 47508 \end{array}$$

Adjuk össze a három szorzás eredményét. A végeredmény 47508.

KÖZELEBBRŐL

A táblázatos szorzási módszer

A 428 és a 111 szorzata egy táblázat segítségével egyszerű szorzásokra is lebontható. Mindkét számot százaskokra, tízesekre és egyesekre bontjuk, és ezeket egyenként összeszorozzuk egymással.

▷ A végső lépés

A végeredményhez adjuk össze a kilenc szorzás eredményét.

A 428 SZÁZAS, TÍZES ÉS EGYES RÉSZEKRE BONTVA			
	400	20	8
100	$400 \times 100 = 40\,000$	$20 \times 100 = 2\,000$	$8 \times 100 = 800$
10	$400 \times 10 = 4\,000$	$20 \times 10 = 200$	$8 \times 10 = 80$
1	$400 \times 1 = 400$	$20 \times 1 = 20$	$8 \times 1 = 8$

$$\begin{array}{r} 40000 \\ 2000 \\ 800 \\ 4000 \\ 200 \\ 80 \\ 400 \\ 20 \\ 8 \\ + \\ \hline 47508 \end{array}$$

ez a végeredmény



Osztás

LÁSD MÉG

◀ 16-17 Összeadás és kivonás

◀ 18-21 Szorzás

Arány és arányosság **56-59** ▶

Az osztásnak kétféle megközelítése lehetséges. Az egyik esetben a számot egyenlő részekre osztjuk (10 érméből 2 embernek fejenként 5 jut), míg a másikban egyenlő darabszámú csoportokra osztjuk (ha 10 érméből 2 érmés kupacokat képezünk, 5 kupacot kapunk).

Az osztás fogalma

Amikor egy számot egy másikkal elosztunk, arra vagyunk kíváncsiak, hogy a második szám (az osztó) hányszor fér bele az elsőbe (az osztandóba). Például a 10-et 2-vel elosztva megtudhatjuk, hányszor van meg a 2 a 10-ben. Az osztás eredményét hányadosnak nevezzük.



◀ Az osztás jelölése

Az osztást háromféleképpen jelölik, azonban mindhárom ugyanazt jelenti, 6 és 3 hányadosa például $6 \div 3$, $6/3$ vagy $\frac{6}{3}$ alakban is felírható.

▽ Az osztás mint részekre bontás

Az egyenlő részekre bontás az osztás egyik típusa. Ha négy cukorkát két ember között egyenlően elosztunk, mindenki ugyanannyi cukorkát kap: kettőt.



$$4 \text{ CUKORKA} \div 2 \text{ EMBER} = 2 \text{ CUKORKA FEJENKÉNT}$$

KÖZELEBBRŐL

Az osztás és a szorzás kapcsolata

Az osztás a szorzás közvetlen ellentéte vagy „fordított művelete”, a kettő mindig összefügg. Ha ismerjük egy osztás eredményét, mindig tudunk belőle szorzást képezni, és viszont.

$$10 \div 2 = 5 \quad 5 \times 2 = 10$$

◀ Vissza a kezdetekhez

A 10 (osztandó) és a 2 (osztó) osztásának eredménye (a hányados) 5. Ha a hányadost (5) megszorozzuk az eredeti osztóval (2), megkapjuk az eredeti osztandót (10).



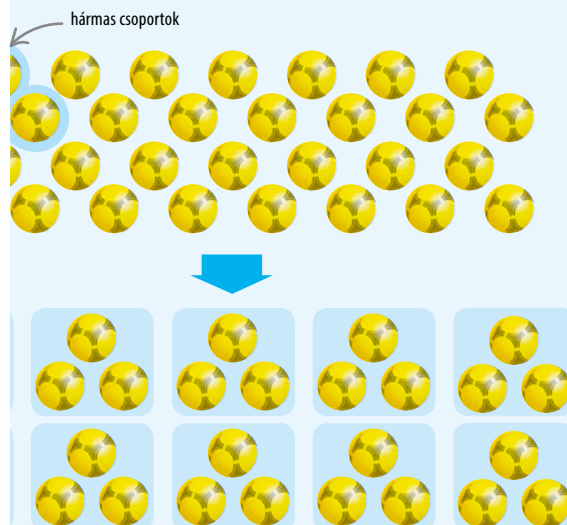
OSZTANDÓ
Az a szám, amelyet a
másik szám eloszt

OSZTÓ
Az a szám, amellyel
az osztandót
elosztjuk

Az osztás másik megközelítése

A részekre osztás helyett úgy is gondolhatunk az osztásra, hogy a második szám (osztó) hány csoportja fér bele az első számba (osztandó). Az osztás eredménye osztás és bennfoglalás esetén is ugyanaz marad.

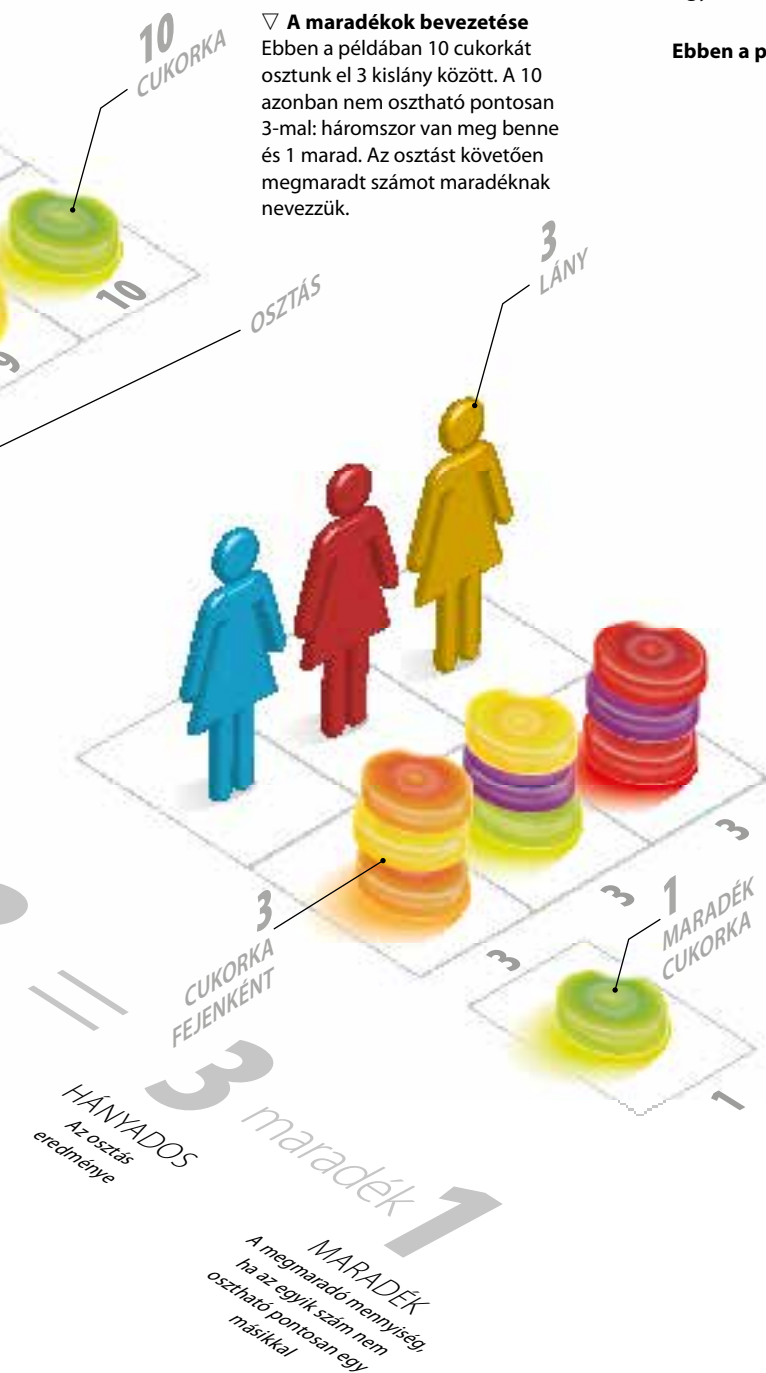
Ebben a példában 30 focilabdát kell osztanunk:



Pontosan 10, egyenként 3 labdából álló csoport van, maradék nélkül, így $30 \div 3 = 10$.

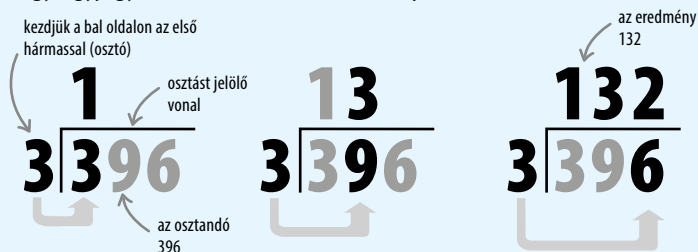
OSZTÁSI TIPPEK

Egy szám akkor osztható...	Ha...	Példa
2-vel	az utolsó jegye páros	12, 134, 5000
3-mal	számjegyeinek összege hárommal osztható	18 $1+8=9$
4-gyel	az utolsó két számjegy alkotta szám osztható 4-gyel	732 $32 \div 4 = 8$
5-tel	utolsó számjegye 5 vagy 0	25, 90, 835
6-tal	utolsó jegye páros és számjegyeinek összege osztható 3-mal	3426 $3+4+2+6=15$
7-tel	nincs egyszerű oszthatósági feltétel	
8-cal	az utolsó három számjegy alkotta szám osztható 8-cal	7536 $536 \div 8 = 67$
9-cel	számjegyeinek összege osztható 9-cel	6831 $6+8+3+1=18$
10-zel	a szám nullára végződik	30, 150, 4270



Rövid osztás

A rövid osztás az a művelet, melynek során a számot (az osztandót) egy egyjegyű számmal (az osztóval) osztjuk el.



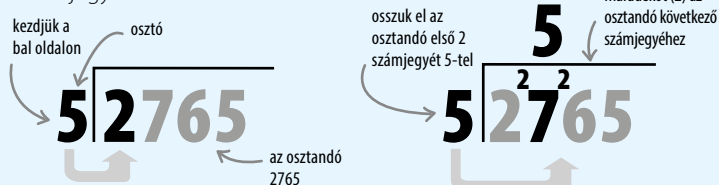
Osszuk el az első hármaszt 3-mal. Ez pontosan 1, ezért írjuk ezt az osztást jelölő vonal fölé, közvetlenül az osztandó 3-as számiegye fölé.

Folytassuk a következő oszloppal,
és osszuk el a 9-et
3-mal. Az eredmény
pontosan 3, írjuk azt
az osztandó 9-es
számiegye fölé.

Osszuk el a 6-ot,
az osztandó utolsó
számjegyét 3-mal.
Az eredmény
pontosan 2, írjuk
az osztandó 6-os
számjegye fölé.

Számok átvitele

Ha az osztás eredménye egy egész szám és egy maradék, a maradékot átvihetjük az osztandó utolsó számjegyéhez.



Kezdjük az 5-ös számmal. Ez nem osztható a 2-vel, mivel annál nagyobb szám. Ehelyett az osztandó első két számjegyét kell elosztani 5-tel.

Osszuk el a 27-et 5-tel. Az eredmény 5, és maradt 2. Írjuk az 5-öt közvetlenül a 7 fölé, és vigyük át a maradékot.



Osszuk el a 26-ot 5-tel. Az eredmény 5, és maradt 1. Írjuk az 5-öt közvetlenül a 6 fölé és vigyük át a maradékot az osztandó következő számjegyéhez.

Osszuk el a 15-öt 5-tel.
Az eredmény pontosan 3, amit írjunk az elválasztó vonal fölé, közvetlenül az osztandó utolsó, 5-ös jegye fölé.

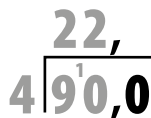
KÖZELEBBRŐL

A maradékok átalakítása

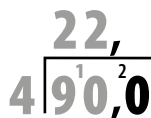
Ha egy szám nem osztható pontosan egy másikkal, akkor az eredmény maradékot tartalmaz. Ez a maradék tizedesjegyekké alakítható.



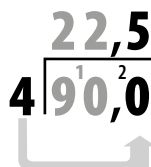
Távolítsuk el a maradékot,
(ez esetben 2), hogy csak
a 22 maradjon. Írjunk egy
tizedesvesszőt az osztást jelölő
vonal feletti és alatti számok után.
Ezt követően írjunk egy nullát az
osztandóhoz, a tizedesvessző után.



Vigyük át a maradékot (2) az osztást jelölő vonal fölötti részéről alulra, és írjuk az előbb felírt nulla elé.



Osszuk el a 20-at 4-gyel. Az eredmény pontosan 5, így írjuk azt közvetlenül az osztandó 0 számjegye fölé, a tizedesvessző után.



KÖZELEBBRŐL

Osztás egyszerűbben

Az osztások egyszerűbbé tehetők, ha az osztót szorzótényezőkre bontjuk. Ez azt jelenti, hogy az eredményt több, egyszerűbb osztás segítségével kapiuk meg.

$$816 \div 6$$

az osztó 6, amely 2×3 -mal egyenlő.
A 6-ot 2-re és 3-ra bontva a művelet egyszerűsödik

$$816 \div 2 = 408$$

408 ÷ 3 = 136

- összuk el a számot az osztó első szorzótényezőjével

összük el az eredményt az osztó második szorzótényezőjével

Az osztó szorzótényezőkre bontása bonyolultabb osztások esetén is használható.

405 ÷ 15

- a 15-öt 5-re és 3-ra bontva
(melyek szorzata 15) a művelet
egyszerű

$$405 \div 5 = 81$$
$$81 \div 3 = 27$$

↑ osszuk el a számot az osztó
első szorzótényezőjével

összük el az eredményt az osztó második szorzótényezőjével

Hosszú osztás

A hosszú osztást akkor használjuk, ha az osztó legalább két, az osztandó pedig legalább három számjegyből áll. A rövid osztástól eltérően a részeredményeket teljesen ki kell írni az osztást jelölő vonal alá. A maradék meghatározásához szorzást használunk.



← az eredmény 1

$$\begin{array}{r} 1 \\ 52 \overline{) 754} \end{array}$$

← osszuk el az osztandó első két számjegyet az osztóval

← vonjunk ki a 75-ből 52-t

$$\begin{array}{r} 1 \\ 52 \overline{) 754} \\ -52 \\ \hline 23 \end{array}$$

← az első osztás maradéka

← osszuk el a 234-et az osztóval

$$\begin{array}{r} 14 \\ 52 \overline{) 754} \\ -52 \\ \hline 234 \end{array}$$

← hozzuk le az osztandó utolsó számjegyet és írjuk a maradék mellé

Elsőként osszuk el az osztandó első két számjegyet az osztóval. 75-ben az 52 egyszer van meg, ezért írunk egy 1-est az osztást jelölő vonal fölé úgy, hogy a most elosztott szám (75) utolsó jegye fölé kerüljön.

Számítsuk ki az első maradékot. A 75 nem osztható pontosan 52-vel. A maradék kiszámításához vonjuk ki a 75-ből az 52-t. Az eredmény 23.

Most hozzuk le az osztandó utolsó számjegyet és írjuk a maradék végére, hogy abból 234 legyen. Ezt követően osszuk el a 234-et 52-vel. Mivel 4-szer van meg benne, írunk egy 4-est a fenti eredmény 1-ese mellé.

← szorozzuk meg az 52-t 4-gyel (ahányszor az 52 a 234-ben megvan), így 208-at kapunk

$$\begin{array}{r} 14 \\ 52 \overline{) 754} \\ -52 \\ \hline 234 \\ -208 \\ \hline 26 \end{array}$$

← a második osztás maradéka

← írunk tizedesvesszőt és egy nullát

$$\begin{array}{r} 14 \\ 52 \overline{) 754,0} \\ -52 \\ \hline 234 \\ -208 \\ \hline 260 \end{array}$$

← hozzuk le a nullát és kapcsoljuk hozzá a maradékhoz

← írunk egy tizedesvesszőt a felső szám után

$$\begin{array}{r} 14,5 \\ 52 \overline{) 754,0} \\ -52 \\ \hline 234 \\ -208 \\ \hline 260 \end{array}$$

← írjuk az utolsó osztás eredményét a tizedesvessző után

Számítsuk ki a második maradékot. Az osztó (52) nincs meg pontosan a 234-ben. A maradék kiszámításához szorozzuk meg az 52-t 4-gyel, így 208-at kapunk. Vonjuk ki a 208-at a 234-ből; az eredmény 26.

Már nem tudunk több egész számot lehozni, ezért írunk egy tizedesvesszőt és egy nullát az osztandó után. Hozzuk le a nullát és írjuk a maradék (26) után, hogy 260-at kapjunk.

Írunk egy tizedesvesszőt a 14-es szám után. Ezt követően osszuk el a 260-at 52-vel, ami pontosan 5. Írjuk az 5-ös számot az elválasztó vonal fölé, az osztandóhoz imént hozzátoldott nullához igazítva.

11 Prímszámok

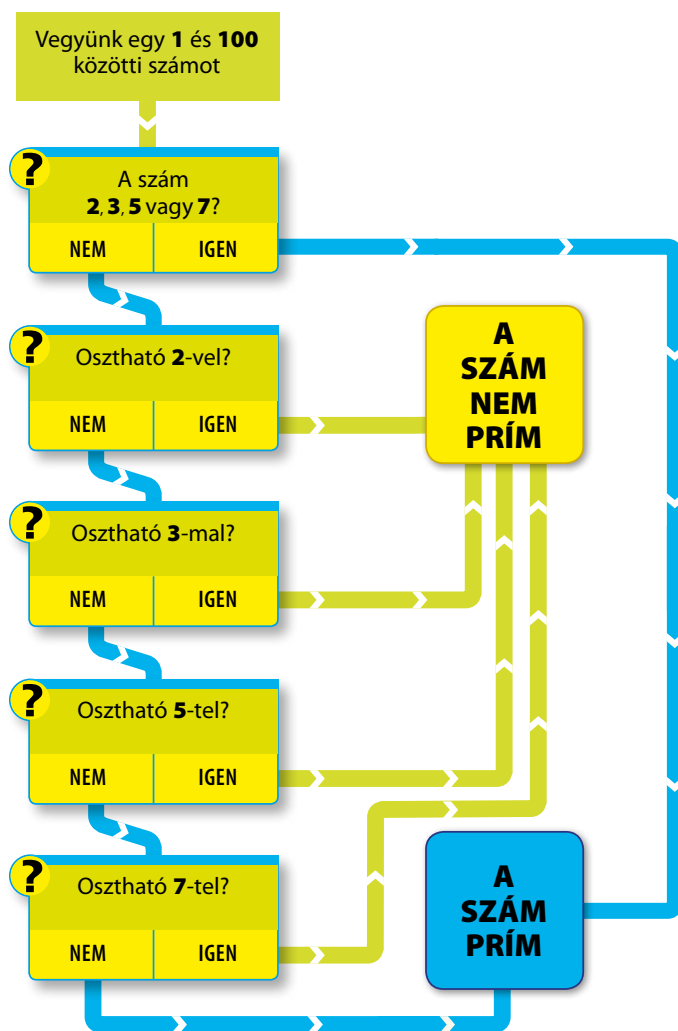
LÁSD MÉG

◀ 18–21 Szorzás

◀ 22–25 Osztás

A prímszámok bevezetése

Mintegy 2000 évvel ezelőtt Eukleidész görög matematikus észrevette, hogy bizonyos számok csak eggyel és önmagukkal oszthatóak. Ezeket a számokat prímszámoknak nevezzük. Azokat a számokat, melyek nem prímszámok, összetett számoknak hívjuk, ezek kisebb prímszámok, (az összetett szám prímtényezői) szorzataként állíthatók elő.



△ Prím vagy összetett?

A fenti folyamatábra segítségével megállapíthatjuk, hogy egy 1 és 100 közötti szám prím-e. Ehhez ellenőrizni kell, hogy osztható-e a 2, 3, 5 és 7 prímszámok valamelyikével.

▷ Az első száz szám

Az alábbi táblázatban az első 100 egész szám között előforduló prímszámok láthatók.

az 1 se nem prímszám, se nem összetett szám

a 2 az egyetlen páros prímszám. A többi páros szám nem prím, mivel mindegyik osztható 2-vel

1	2	3	4 2	5
11	12 2 3	13	14 2 7	15 3 5
21 3 7	22 2	23	24 2 3	25 5
31	32 2	33 3	34 2	35 5 7
41	42 2 3 7	43	44 2	45 3 5
51 3	52 2	53	54 2 3	55 5
61	62 2	63 3 7	64 2	65 5
71	72 2 3	73	74 2	75 3 5
81 3	82 2	83	84 2 3 7	85 5
91 7	92 2	93 3	94 2	95 5

Jelölések

17

Prímszám

A kék négyzet azt jelzi, hogy a szám prímszám, azaz az 1-en és önmagán kívül nincs más osztója.

42

Összetett szám

A sárga négyzet az összetett számokat jelöli, azaz azokat, melyeknek 1-en és önmagán kívül más osztói is vannak.

a kisebb számok azt jelzik, hogy a szám osztható-e 2-vel, 3-mal, 5-tel, vagy 7-tel vagy azok tetszőleges kombinációjával

6 2 3	7	8 2	9 3	10 2 5
16 2	17	18 2 3	19	20 2 5
26 2	27 3	28 2 7	29	30 2 3 5
36 2 3	37	38 2	39 3	40 2 5
46 2	47	48 2 3	49 7	50 2 5
56 2 7	57 3	58 2	59	60 2 3 5
66 2 3	67	68 2	69 3	70 2 5 7
76 2	77 7	78 2 3	79	80 2 5
86 2	87 3	88 2	89	90 2 3 5
96 2 3	97	98 2 7	99 3	100 2 5

Prímtényezők

Minden szám prímszám vagy prímszámok szorzata. A prímtényezőkre bontás az a művelet, melynek során egy összetett számot az azt alkotó prímszámokra bontunk. Utóbbiakat prímtényezőknak nevezzük.

$$30 = 5 \times 6$$

prímtényező maradék tényező

A 30 prímtényezőinek meghatározásához először keressük meg a legnagyobb prímet, amivel a 30 osztható. Ez az 5, a maradék pedig 6 ($6 \times 5 = 30$), amit további prímszámokra kell bontanunk.

$$6 = 3 \times 2$$

legnagyobb prímtényező

Most vegyük a maradékot, és keressük meg, hogy melyik a legnagyobb prímosztója, illetve a kisebb prímosztókat is. Esetünkben a 6 prímszám osztói a 3 és a 2.

$$30 = 5 \times 3 \times 2$$

soroljuk fel a prímtényezőket csökkenő sorrendben

Azt kaptuk, hogy a 30 az 5, 3 és 2 prímszámok szorzata. Más szóval a 30 prímtényezői a 2, a 3 és az 5.

VALÓS VILÁG

Titkosítás

Számos banki és üzleti tranzakció az interneten és egyéb kommunikációs csatornákon keresztül történik. Az információkat biztonsági céllal kódolják, meghozzá olyan számok segítségével, melyek két nagy prímszám szorzatai. Ez azért biztonságos, mivel nincs olyan kémprogram, ami el tudná végezni a prímtényezőkre bontást, ha a prímtényezők rendkívül nagyok.

▷ Adatvédelem

A biztonság megőrzése érdekében a matematikusok folyamatosan keresik az egyre nagyobb és nagyobb prímekeket.

```
fdjhg83asldkfdslkfjfour523ijwli
eorit84wodfpflciry38s0xb6lkj
qpeoith73kdicuvyebdkciurmol
wpeodikrucnyr83iowp7uhjwm
kdieolekdoripasswordqe8ki
mdkdoritut6483kednffkeoskeo
kdieujr83iowplwqpwo98irkldil
ieow98mqloapkiuhrmneuidy6
woqp90jqiuke4lmicunewkiuyj
```

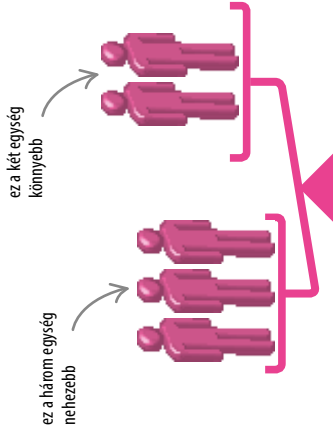
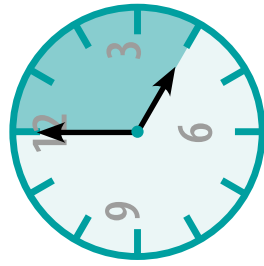




Mértékegységek

Alapegységek

A mértékegységek bármilyen méret nagyságának megnevezésén alapuló vagy szabványban rögzített egységei. Ezek teszik lehetővé a mennyiségek pontos mérését. A három alapegység az idő, a súly (illetve a tömeg) és a hossz.



△ Idő

Az idő mértékegységei az ezredmásodperc, másodperc, perc, óra, nap, hét, hónap és év. Különböző országok és kultúrák naptárjai esetenként máshova teszik az új év kezdetét.

△ Súly és tömeg

A súly, azaz hogy valami milyen nehéz, a rá ható gravitációs erővel van összefüggésben. A tömeg az adott tárgyat alkotó anyag mennyisége. A tömeg mértékegysége például a gramm és a kilogramm.

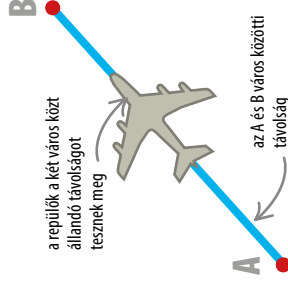
△ Hossz

A hossz valaminek a hosszúságát jelenti. A metrikus rendszerben milliméterben, centiméterben, méterben és kilométerben, míg az angolszász rendszerben hüvelykben, lábban, yardban és mérföldben mérjük (lásd: 242–244. oldal).

KÖZLEBBRŐL

A távolság

A távolság a két pont közti tér nagysága. A távolságot gyakran használják útvonal megadására is, amely nem mindig azonos a két pont közötti legrövidebb úttal.



LÁSD MÉG

Térfogat

154–155 >

Képletek

177–179 >

Kíslexikon

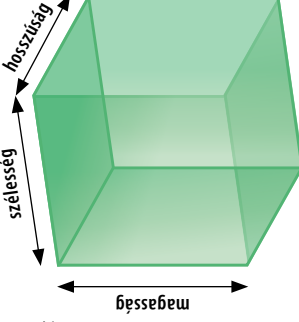
242–244 >

Összetett mértékegységek

Az összetett mértékegységek egyenlő több alapegységből tevődnek össze, akár ugyanazon alapegység ismétlődéséből. Ide tartozik például a terület, a térfogat, a sebesség vagy a sűrűség.

△ Terület

A területet négyzetegységekben mérjük. A négyzet területe a hosszúság és a szélesség szorzata. Ha mindkettőt méterben (m) fejezzük ki, akkor a terület mértékegysége $m \times m$, másképpen m^2 .

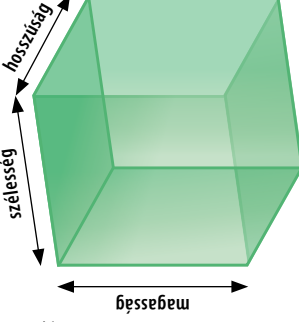


$$\text{terület} = \text{hosszúság} \times \text{szélesség}$$

a terület két ugyanolyan alapegységből áll, mivel a szélesség szintén hossz mérték

△ Térfogat

A térfogatot köbegységekben mérjük. A téglalest területe a magasság, szélesség és hosszúság szorzata. Ha mindhárom méterben (m) mérjük ki, akkor a térfogat mértékegysége $m \times m \times m$, másképpen m^3 .



$$\text{térfogat} = \text{hosszúság} \times \text{szélesség} \times \text{magasság}$$

a térfogat három azonos típusú egységből tevődik össze, mivel a szélesség és a magasság szintén hossz mérték

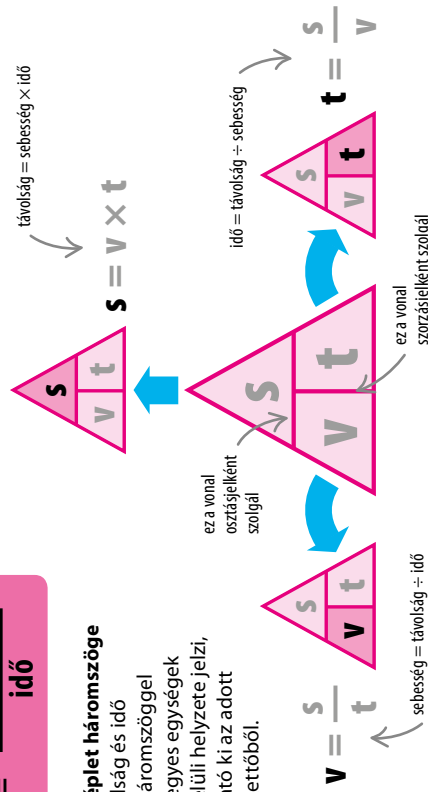
Sebesség

A sebesség az adott idő alatt megtett távolságot (hosszat) méri. Ez azt jelenti, hogy a sebesség képlete hossz ÷ idő. Ha ezeket kilométerben (km), illetve órában (h) mérjük, akkor a mértékegysége km/h.

$$\text{sebesség} = \frac{\text{távolság}}{\text{idő}}$$

▷ A sebességeképlet háromszöge

A sebesség, távolság és idő kapcsolata egy háromszöggel ábrázolható. Az egyes egységek háromszögön belüli helyzete jelzi, hogyan számítható ki az adott egység a másik kettőből.



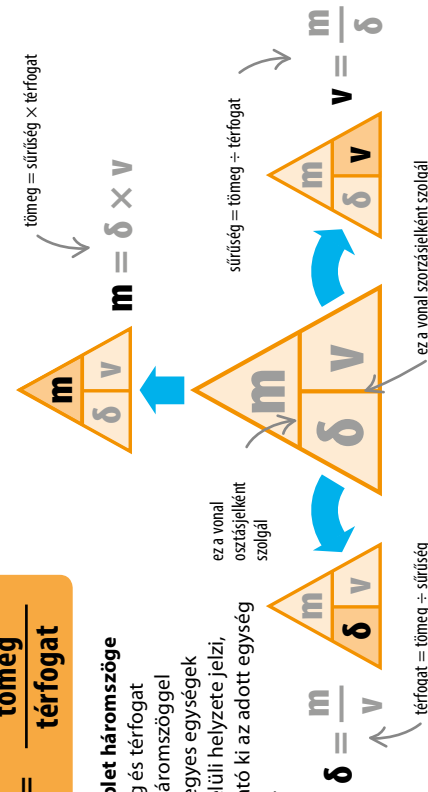
Sűrűség

A sűrűség megmutatja, hogy valamiből egy adott térfogatnyi mennyi anyagot tartalmaz. Ez egy tömeg- és egy térfogategységből tevődik össze. A sűrűség képlete tömeg ÷ térfogat. Ha ezt grammban (g) és köbcentiméterben (cm³) mérjük, akkor a sűrűség mértékegysége g/cm³.

$$\text{sűrűség} = \frac{\text{tömeg}}{\text{térfogat}}$$

▷ A sűrűségeképlet háromszöge

A sűrűség, tömeg és térfogat kapcsolata egy háromszöggel ábrázolható. Az egyes egységek háromszögön belüli helyzete jelzi, hogyan számítható ki az adott egység a másik kettőből.



▷ **A sebesség kiszámítása**
Egy teherautó 20 perc alatt 20 kilométert tesz meg. Ezen adatokból kiszámítható a km/h-ban megadott sebesség.

összük el a 20-at 60-nal, hogy tudjuk, mennyi óra

$$20 \text{ perc} = \frac{20}{60} = \frac{1}{3} \text{ óra}$$

Először váltjuk át a perceket órákra. Ehhez osszuk el az értéket 60-nal, majd egyszerűsítsünk 20-szal, így megkapjuk a végeredményt (1/3 óra).

$$s = \frac{D}{T} = 60 \text{ km/h}$$

a távolság 20 km
az idő 1/3 óra

Most helyettesítsük be a távolság és az idő értékét a sebesség képletébe. Osszuk el a távolságot (20 km) az idővel (1/3 óra), hogy megkapjuk a sebességet (60 km/h).

▷ **A térfogat meghatározása**
Az ólom sűrűsége 0,0113 kg/cm³. Ezen adat alapján meghatározható egy 0,5 kg tömegű ólom súly térfogata.

az ólom sűrűsége állandó, a tömegtől függetlenül

a tömeg 0,5 kg

$$v = \frac{m}{\delta} = 44,25 \text{ cm}^3$$

a sűrűség 0,0113 kg/cm³

▷ Használjuk a képletet!

Helyettesítsük be a tömeg és a sűrűség értékét a térfogat képletébe. Osszuk el a tömeget (0,5 kg) a sűrűséggel (0,0113 kg/cm³), hogy megkapjuk a keresett értéket (44,25 cm³).